יחידה פלוי

המוסד לביטוח לאומי
האגף למחקר ותכנון

בעיות בשימוש במדדי אי שוויון
לדירוג התפלגויות הכנסה

מאת:

יהודה גבע

מחקר מס' 12

ירושלים, ספטמבר 1976, אלול תשל"ו

המוסד לביטוח לאומי
האגף למחקר ותכנון

בעיות בשימוש במדדי אי שוויון
לדירוג התפלגויות הכנסה

מאת:

יהודה גבע

מחקר מס׳ 12

ירושלים, ספטמבר 1976, אלול תשל"ו

מאמר זה נכתב במסגרת עבודתי במחלקה למחקר בסיסי באגף למחקר
ותכנון במוסד לבטוח לאומי.

תודתי נתונה למנהלת המחלקה ד"ר מרג'ורי הוניג על הערותיה
המועילות בביצוע המחקר.

כמו כן נתונה תודתי למר רפאל רוטר המשנה למנכ"ל ומנהל האגף
למחקר ותכנון על עזרתו במחקר.

תודה מיוחדת נתונה למר יוסף תמיר מהמחלקה למחקר בסיסי אשר
היה הרבה יותר משותף בגיבוש הרעיון, ואשר הדרכתו והערותיו
המועילות ליוו את העבודה בכל שלביה, ולהם חלק נכבד במוצר
הסופי.

תוכן הענינים

1. מבוא

מדדי אי השוויון בהכנסה משמשים, בין השאר, לדירוג התפלגויות שונות של הכנסה, כלומר, לכל שתי התפלגויות הכנסה מדד אי השוויון נותן תשובה לשאלה איזה התפלגות שוויונית יותר.

במחקרים כלכליים הבוחנים את שאלת חלוקת ההכנסות נעשה שימוש במדדים שונים של אי-שוויון, ובמקרים רבים הדירוג המתקבל משתנה עם המעבר משימוש במדד אחד לשימוש במדד אחר.

לפיכך מתעוררת השאלה מהי המשמעות של בחירת מדד כלשהו, והאם ניתן למצוא פתרון לבעית הדירוג בהסכמה על מדד אי-השוויון ה"אידיאלי".

אטקינסון [2] הראה כי הסתירה בדירוג התפלגויות הכנסה בין מדדים שונים אופינית בד"כ למצבים בהם עקומות לורנץ שלהן נחתכות, והיא נובעת מהשוני בין המדדים ברגישות להעברות הכנסה בתחומים השונים של ההתפלגות. דלטון [3] הצביע על העובדה כי כל מדד מניח תפישה מסוימת של רווחה חברתית, ולפיכך בעית הדירוג קשורה בהגדרת פונקצית רווחה חברתית, המשמשת להשוואת מצבים שונים של התפלגות הכנסות (א). אטקינסון (ב) הציע מדד הנובע ישירות מהגדרה ספציפית של פונקצית הרווחה החברתית, ובו פרמטר המבטא את הרגישות להעברות הכנסה בתחומים השונים של ההתפלגות.

מאמר זה עושה שימוש בסקרי הכנסות שכירים בישראל בשנים 1969-1973, במטרה לבחון את המשמעות האמפירית של שימוש במדד אטקינסון, היינו, משמעות פרמטר "שנאת השוויון" של המדד מבחינת הקשר בינו להתפלגויות הכנסה ספציפיות.

בסעיף הראשון נציג את בעית הדירוג בעזרת מדדי ג'יני ומדד הסטיה היחסית הממוצעת. הסעיף השני יציג את מדד אטקינסון ובסעיף השלישי הצגת הממצאים האמפיריים.

המסקנה העיקרית מהממצאים היא כי למרות שבמישור התאורטי הגישה שפתח אטקינסון מבהירה את מהות בעית הדירוג, הרי צמצום הבעיה לבחירת פרמטר "שנאת שוויון" אינה מקילה הרבה מבחינה "מעשית".

א. על מדד ג'יני ופונקצית רווחה חברתית ראה:

1. Kats. A. "On the Social Welfare function and the parameters of Income Distribution," Journal of Economic Theory, 5, (1973), 377–382.
2. Newbery, D. "A Theorem on the Measurement of Inequality", Journal of Economic theory, 2, (1970), 264–266.
3. Sheshinski, E. "Relation Between the Social Welfare Function and the Gini Index of Inequality, Journal of Economic Theory," 4, (1972).

גישה שונה הוצעה ע"י שלמה יצחקי.

אם נרצה לדרג התפלגויות הכנסה לפי (5) (ראה סעיף 3) וקיים: $u'(y) = 1 - F(y)$

אזי בעזרת (2) (ראה סעיף 2) נקבל: $W = \int_0^{\bar{y}} u(y) f(y)\, dy = \mu (1-G)$

וירידה באי השוויון אקויולנטית (μ קבוע) לעליה בסה"כ הרווחה החברתית.

ב. שם.

2. דירוג בעזרת מדדי ג׳יני ומדד הסטיה היחסית הממוצעת

שני מדדים בהם נעשה בישראל שמוש נרחב במחקרים אמפיריים:הם מדד ג׳יני (G) ומדד הסטיה היחסית הממוצעת (T).

בעזרת עקומות לורנץ ניתן לראות כי כאשר שתי עקומות נחתכות ייתכן שמדד ג׳יני ידרג התפלגות אחת (A) כשוויונית יותר מהשניה (B) ולפי מדד הסטיה היחסית הממוצעת, התפלגות (B) תהיה שוויונית יותר מ- (A).

ננסח תחילה את שני המדדים במונחי עקומות לורנץ.

יהי $F(\hat{y})$ פונקצית ההתפלגות של יחידות הכנסה (משפחות) עד הכנסה $\hat{y}$ כאשר הן מסודרות בסדר עולה לפי הכנסתן :

$$F(\hat{y}) = \int_0^{\hat{y}} f(y)\,dy$$

ויהי $\Phi(\hat{y})$ פונקצית ההתפלגות של ההכנסות (y) עד הכנסה $\hat{y}$,

$$\phi(\hat{y}) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\hat{y}} y\,f(y)\,dy$$

כאשר: $\mu = \int_0^{\bar{y}} y\,f(y)\,dy$

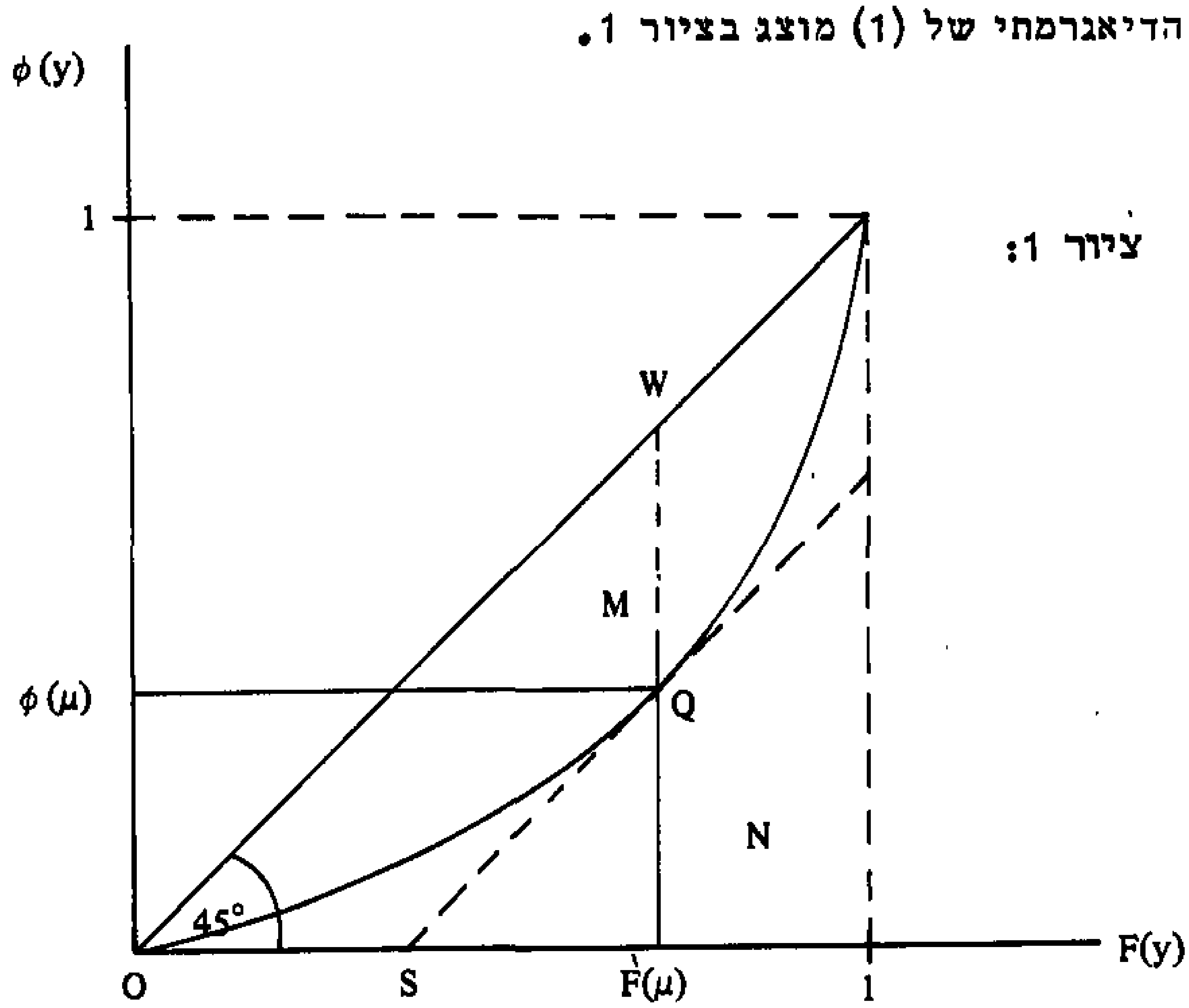
μ היא ההכנסה הממוצעת ו- $\bar{y}$ ההכנסה הגבוהה ביותר.

ע"י אנטגרציה בחלקים של $\phi(\hat{y})$ נקבל:

$$(1) \quad \phi\,[F(\hat{y})] = \frac{\hat{y}}{\mu}\,F(\hat{y}) - \int_0^{\hat{y}} F(y)\,dy$$

התיאור הדיאגרמתי של (1) מוצג בציור 1.

ציור 1:



מדד ג׳יני נקבע ע"י השטח (M) שבין הישר בזוית 45° מהראשות לבין הפונקציה $\Phi[F(y)]$ ומתקיים:

$$G \quad 2M$$

הנוסחה למדד ג׳יני תהיה:

$$(2) \qquad G = \int_0^{\bar{y}} \left[\frac{y}{\mu} F(y) \quad \Phi(y) \right] f(y) \, dy$$

נוכל לראות זאת ע"י אנטגרציה של (2).

$$\int_0^{\bar{y}} \left[\frac{y}{\mu} F(y) - \Phi(y) \right] f(y) \, dy = \int_0^{\bar{y}} \left[\frac{\partial (F \cdot \Phi)}{\partial y} \qquad 2 \Phi \frac{dF}{dy} \right] dy$$

$$= [F \cdot \Phi]_0^{\bar{y}} - 2 \int_0^{\bar{y}} \Phi dF = 1 - 2N = 2M$$

כאשר N הוא השטח שמתחת לעקומת לורנץ.
מדד הסטיה היחסית הממוצעת (T) עבור התפלגות רציפה נתון ע"י (3)

$$(3) \qquad T = \int_0^{\bar{y}} \left| \frac{y}{\mu} - 1 \right| f(y) \, dy$$

ע"י אנטגרציה של (3) נקבל עבור מדד T :

$$(4) \quad T = \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} (\mu - y) f(y) \, dy + \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{\bar{y}} (y - \mu) f(y) \, dy =$$

$$= F(\mu) - \phi(\mu) + \phi(u) \Big|_{\mu}^{\bar{y}} - F(y) \Big|_{\mu}^{\bar{y}}$$

$$= 2 \, [F(\mu) - \phi(\mu)]$$

מאחר ולפי ההגדרה מתקיים $F(\bar{y}) = \phi(\bar{y}) = 1$. במונחי דיאגרמה 1 נתון T ע"י הקטע $\overline{OS} = \overline{QW}$ המתקבל ע"י העברת משיק ל-($\Phi(y)$ בזית 45° עם הציר האפקי.

נוכל לראות זאת ע"י חשוב השפוע של $\Phi[F(y)]$ בנקודה בה $y=\mu$

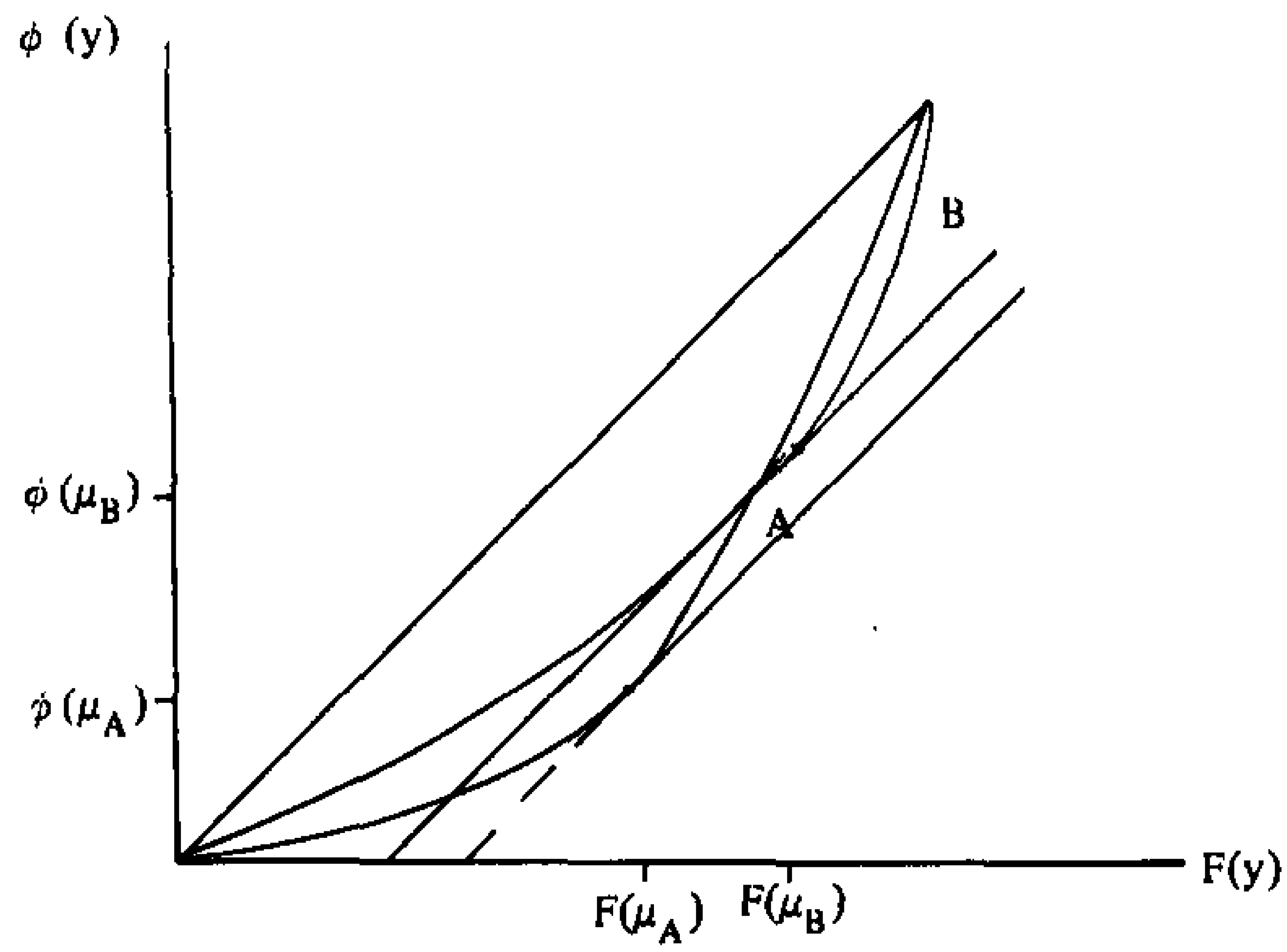
$$\frac{d\phi}{dF} = \frac{d\phi}{dy} : \frac{dF}{dy} = \frac{yf(y)}{\mu} : f(y) = \frac{y}{\mu}$$

ולכן

$$\left.\frac{d\phi}{dF}\right|_{y=\mu} = 1$$

יהיו A ו- B שתי התפלגויות הכנסה עבורן עקומות לורנץ נחתכות (ציור 2), המקיימות $G_a < G_b$. היינו, ההתפלגות המתוארת ע"י עקומת לורנץ A שוויונית יותר לפי מדד ג'יני מזו המתוארת ע"י B.

ציור 2:

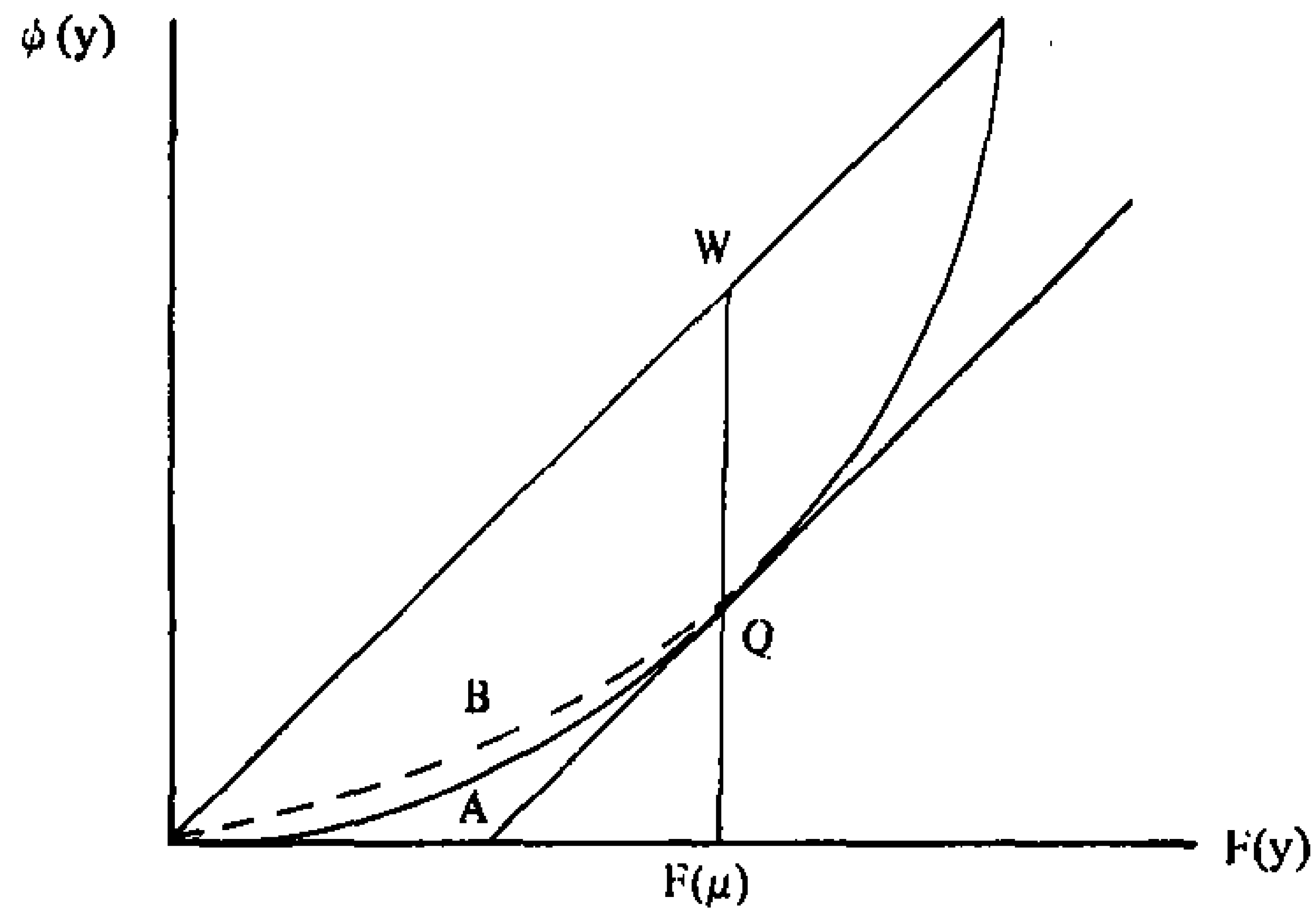


מ-(4) נובע כי מתקיים $T_b < T_a$ כאשר T_a ו- T_b הם מדדי T להתפלגויות A ו- B בהתאמה, היינו התפלגות B שוויונית יותר לפי מדד הסטיה היחסית הממוצעת מהתפלגות A.

מציור 2 נוכל לראות כי העקומה $\phi_b(y)$ יכולה להתקבל מ-$\phi_a(y)$ ע"י העברת הכנסה מבעלי הכנסות בינוניות לבעלי הכנסות נמוכות יותר וגבוהות יותר, ודירוג שתי התפלגויות ההכנסה ע"י מדד אי-שוויון כלשהו תלוי איפוא ברגישות המדד להעברות הכנסה בתחומים השונים של ההתפלגות.

ציור 3 מדגים מצב בו התפלגות ההכנסות המיוצגת ע"י העקומה B מתקבלת מזו המיוצגת ע"י A, ע"י העברות הכנסה בנוסח פיגו-דלטון (א) בין שני פרטים שהכנסתם קטנה מהממוצעת.

ציור 3:



הגודל $\overline{QW}$ לא משתנה – מדד T שווה לשתי ההתפלגויות – אולם $G_b < G_a$, ולפיכך קיימת אי התאמה בדירוג שתי ההתפלגויות בעזרת שני מדדי אי השוויון.

לבסוף נעיר כי אם שתי עקומות לורנץ אינן נחתכות ואינן שוות בשום נקודה (פרט כמובן לנקודות הקצה), הרי שני המדדים ידרגו את ההתפלגות עבורה עקומת לורנץ היא הפנימית, כשוויונית יותר.

(א) העברת הכנסה d ($d>o$) מפרט שהכנסתו y_1 לפרט שהכנסתו y_2 כאשר מתקיים $y_1 - d > y_2$.

3. גישת פונקצית הרווחה החברתית

דלטון(א) הראה כי כל מדד מניח תפישה מסוימת של רווחה חברתית.והציע מדד אי-שוויון המבטא את הפסד הרווחה הנובע מחלוקה לא שוויונית של ההכנסות.(ב) גישה זו עומדת ביסוד הדרישה ממדדי אי-שוויון שיקיימו את עקרון ההעברה. כלומר, כל העברת הכנסה בנוסח פיגו-דלטון תביא לירידה במדד אי-השוויון.

אם נדרג התפלגויות הכנסה לפי פונקצית רווחה חברתית מטיפוס (5)

$$(5) \qquad W = \int_{o}^{\bar{y}} u(y) f(y)\, dy$$

כאשר $u(y)$ פונקצית תועלת אינדיוידואלית של ההכנסה המקיימת:

$$(5') \qquad u'(y) > o$$

$$(5'') \qquad u''(y) < o$$

הרי העברות מסוג זה יביאו לעליה ב- W וצריכות להביא לירידה באי-השוויון.(ג)

אטקינסון הראה כי המדד של דלטון משתנה עבור טרנספורמציה ליניארית של פונקצית התועלת והציע מדד אחר:

$$(6) \qquad I = 1 - \frac{yede}{\mu}$$ (ד)

כאשר Yede היא רמת ההכנסה ליחידה, שאם תנתן לכולן תתן את אותה רמת רווחה חברתית (w) כמו שמתקבלת תחת התפלגות ההכנסות הקיימת למעשה - היינו:

$$(7) \qquad u(yede) = \int_{o}^{\bar{y}} u(yede) f(y)\, dy = \int_{o}^{\bar{y}} u(y) f(y)\, dy = W$$

מ-(5'), (6) ו-(7) נובע כי ירידה ב- I (μ קבוע) פרושה עליה ברווחה החברתית.

ההנחות (5') ו-(5") על פונקצית התועלת מבטיחות כי המדד יקבל ערכים בתחום [0, 1]. מרבית המדדים המקובלים בלתי תלויים ברמה האבסולוטית של ההכנסות, ופירושו כי הכפלה בקבוע חיובי של כל ההכנסות לא תשנה את מדד אי השוויון.

אם נדרש מהמדד I שיקיים תכונה זו צריכה פונקצית התועלת להיות מהסוג: (ראה [1] ו-[5]).

$$(8) \qquad u(y) = \begin{cases} A + B\dfrac{y^{1-\epsilon}}{1-\epsilon} & \epsilon \neq 1 \\ \log y & \epsilon = 1 \end{cases}$$

מ-(7) רואים כי ϵ הוא האנלוג למדד שנאת סיכון יחסי של ארו ויכול להיות מוגדר כפרמטר "שנאת שוויון".

היינו:

$$\epsilon = -y\, \frac{u''(y)}{u'(y)}$$ (ה)

המדד המתקבל ע"י הצבת $u(y)$ מ-(8) ב-(6) יהיה:

$$I = 1 - \left[\int_0^{\bar{y}} \left(\frac{y}{\mu}\right)^{1-\epsilon} f(y)\,dy \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

ϵ הוא פרמטר המבטא את רגישות המדד להעברות הכנסה בתחומים השונים של ההתפלגות. ככל שהוא גדול יותר עולה המשקל הניתן להעברות הכנסה בתחום ההכנסות הנמוכות.

משמעות הגודל האבסולוטי של המדד היא כי אם $I = a$ ידרשו רק $1 - a$ מסך ההכנסה כך שאם תתחלק באופן שוויוני תתן אותה רמת רווחה חברתית כזו הקיימת למעשה מאחר ומ-(6) מתקיים: $n \cdot Y_{ede} = (1 - a)\, n\mu$ כאשר n סה"כ הפרטים במשק.

א. שם.

ב. המדד של דלטון הוא $\dfrac{\int_0^{\bar{y}} u(y) f(y)\,dy}{u(\mu)}$

ג. קבלת העקרון מחייבת איפוא דחיית השמוש במדד T.

ד. Y_{ede} = Equally Distributed Level of Income.

ה. $\epsilon > 0$ הוא תנאי לקעירות פונקצית התועלת.

$B > 0$ הוא תנאי לקיום תועלת שולית חיובית.

4. המשמעות האמפירית של פרמטר "שנאת-שוויון" במדד אטקינסון

אטקינסון[א] עושה שמוש בהתפלגויות הכנסה של 12 מדינות להדגמת בעית הדירוג בעזרת מדדי ג׳יני, סטית התקן של הלוגריתמים[ב] ומקדם השונות[ג]. בסעיף 2 ראינו כי סתירה בדירוג יכולה להתקיים גם בין מדדי ג׳יני והסטיה היחסית הממוצעת.

בשני המקרים מתעוררת הבעיה כאשר עקומות לורנץ נחתכות. בציור 2 רואים כי התפלגות A שוויונית יותר בתחום ההכנסות הגבוהות ו- B שוויונית יותר בתחום ההכנסות הנמוכות, וכי B מתקבל מ- A ע"י העברת הכנסה מבעלי הכנסות בינוניות לבעלי הכנסות נמוכות יותר וגבוהות יותר.

מהגדרת מדד אטקינסון נובע כי ϵ "גבוה" ידרג את B כשוויונית יותר מ- A , וההיפך מתקיים אם נחשב את מדדי אי השוויון לשתי ההתפלגויות ברמה "נמוכה" של פרמטר "שנאת שוויון". קיימת איפוא רמה מסוימת של "שנאת שוויון" (ϵ_0), שתתן לשתי ההתפלגויות מדד זהה, כאשר מתקיים:

$I_b < I_a$ עבור $\epsilon > \epsilon_0$

ו- $I_a < I_b$ עבור $\epsilon < \epsilon_0$

כאשר I_a ו- I_b הם מדדי אטקינסון של אי השוויון להתפלגויות A ו- B בהתאמה.

אם נמצא הגורמים הקובעים את ϵ, ההופך את דירוג ההתפלגויות תהיה משמעות לבחירת פרמטר "שנאת השוויון" בחשוב מדד אטקינסון, שכן עבור וקטור נתון של משתנים הקובעים את ה- ϵ המהפך דירוג נוכל לומר מהו תחום השוויון המועדף ע"י בחירת ϵ כלשהו.

הבסיס לחשובים הן הכנסות מסקרי הכנסות שכירים שערכה הל.מ.ס בשנים 1969-1973. אוכלוסית הסקר מוינה לפי סדר עולה של הכנסות למבוגר סטנדרטי וההכנסה הנמדדת היא הכנסה משפחתית. שני סוגי הכנסות שמשו לצורך החשובים:

א. הכנסה כלכלית הכוללת הכנסות בני המשפחה מעבודה, ריבית, דיוידנד, רנטה והעברות מפרטים.

ב. הכנסה ברוטו שהיא הכנסה כלכלית בתוספת תמיכות ממוסדות.

לצורך החשובים קובצו התצפיות לקבוצות ב-4 אופנים שונים:

א. בכל קבוצה 10% מהמשפחות.

ב. בכל קבוצה 10% מהמבוגרים הסטנדרטיים.

ג. בכל קבוצה 10% מהנפשות.

ד. בכל קבוצה 10% מהילדים.

כאשר ההכנסה הנמדדת לכל קבוצה היא ההכנסה הממוצעת למשפחה של המשפחות הכלולות בה. באופן זה התקבלו שמונה התפלגויות הכנסה לכל שנה משנות הסקר השונות ביניהן בהגדרת ההכנסה ו/או בצורת האגרגציה של התצפיות.

בלוח 1 מוצגים מדדי ג'יני לשמונה התפלגויות אלה בשנים 1969-73.

לוח 1: מדדי ג'יני לשנים 1969-73

	1969	1970	1971	1972	1973
ילדים					
כלכלית	.522906	.531964	.510841	.536460	.513345
ברוטו	.510918	.520168	.494651	.521658	.494507
נפשות					
כלכלית	.393161	.393082	.382284	.401148	.394878
ברוטו	.373165	.377216	.361633	.377610	.366732
בוגרים					
כלכלית	.356855	.355652	.345425	.362388	.359661
ברוטו	.335921	.339059	.325361	.327465	.330200
משפחות					
כלכלית	.281482	.276475	.265743	.280989	.287726
ברוטו	.256984	.257773	.245815	.251136	.254378

לוח 2: ε מהפך דירוג להתפלגויות הכנסה בשנים 1969-1973

נקודת החתוך של עקומות לורנץ בין עשירונים:					
1 - 2	2 - 3	4 - 5	6 - 7	7 - 8	8 - 9
1.30	1.60	0.08	0.15	0.15	0.30
0.85	2.80			0.08	0.30
2.25	1.60			0.70	
1.95	0.85			0.08	
1.60	5.15				
	1.05				

דירוג התפלגויות הכנסה מחייב עקביות בהגדרת ההכנסות הנמדדות. לפיכך יכולנו להשוות בכל אחת משמונה ההגדרות השונות את התפלגויות ההכנסה בחמש השנים בינן לבין עצמן. עיון בעקומות לורנץ המתקבלות ע"י חבור התצפיות בקטעים ישרים מראה כי מ-80 ההשוואות האפשריות בכחצי מהמקרים אין עקומות לורנץ נחתכות, בכשליש הן נחתכות פעם אחת בלבד ובשאר המקרים פעמיים או יותר.

לוח 2 מסכם את התוצאות המתקבלות ל- ϵ המשווה את מדדי אטקינסון לשתי התפלגויות שעקומות לורנץ שלהן נחתכות, כאשר הטורים שונים ביניהן בנקודת החתוך, ($F(y)$ בו נחתכות שתי העקומות). המספרים בראש כל טור מציינים שני העשירונים ביניהם נחתכות עקומות לורנץ.

ראשית נציין כי עבור 7 מקרים בהם עקומות לורנץ נחתכות לא קבלנו את רמת "שנאת השוויון" שתביא להשוואת מדדי אטקינסון לשתי ההתפלגויות. הסיבה לכך היא שה- ϵ המתקבל צריך היה להיות קטן מ-0.01, וכאשר ϵ שואף לאפס שואף מדד אטקינסון לאפס, היינו מדד אי השיוויון מראה שוויון כמעט מוחלט ולפיכך אינו רגיש להעברות הכנסה.

עיון בלוח 2 מלמד כי ϵ ההופך דירוג אינו תלוי ב-$F(y)$ בלבד מאחר ובשלושת הטורים בהם היה יותר ממקרה אחד בו נחתכו שתי עקומות לורנץ באותה רמה של $F(y)$ רואים שונות רבה בין התוצאות.

מעוט המקרים בהם עקומות לורנץ נחתכות לא מאפשר להסיק מסקנות לגבי הקשרים בין ϵ ההופך דירוג להתפלגויות הכנסה. על מנת לבחון קשרים אילו יצרנו חתוכים של עקומות לורנץ ע"י העברת הכנסות מעשירונים שונים לעשירונים גבוהים יותר ונמוכים יותר בסולם ההכנסות. העברות אילו נעשו עבור ההתפלגות הממוצעת בחמש השנים לכל שמונה סוגי הכנסה/מיון עשירונים. אחוז ההכנסה הממוצע שקיבל כל עשירון בשנים אילו מופיע בלוח 3, והאחוז המצטבר הממוצע מופיע בלוח 4.

העברות ההכנסה נעשו בשני אופנים:

1. הועברה הכנסה מכל עשירון, פרט לעשירונים הראשון והעשירי, לעשירונים גבוהים יותר ונמוכים יותר בסולם ההכנסות, כך שהתקבל חתוך של עקומות לורנץ בין העשירון ממנו נלקחה ההכנסה לעשירון הסמוך שהכנסתו נמוכה יותר.
2. נלקחה הכנסה משני עשירונים סמוכים (פרט לראשון ולעשירי) ונתנה כמו בשיטה 1, כך שהתקבל חתוך בין כל שני עשירונים החל מהראשון והשני ועד השביעי והשמיני.

אחוז ההכנסה מהכנסת כל עשירון שהועבר בשיטה הראשונה מופיע בלוח 5 ואחוז ההכנסה מהכנסת כל עשירון שהועבר בשיטה השניה מופיע בלוח 6. בשני המקרים נשמרה קבועה סה"כ ההכנסה וההכנסה הממוצעת למשפחה בכל האוכלוסיה, בכל ההתפלגויות.

לוח 3: התפלגות הכנסות באחוזים לעשירון,ממוצע 1969-1973

עשירון	ילדים כלכלית	ילדים ברוטו	נפשות כלכלית	נפשות ברוטו	בוגרים כלכלית	בוגרים ברוטו	משפחות כלכלית	משפחות ברוטו
1	1.23	1.55	1.82	2.35	2.76	2.77	2.98	3.89
2	1.94	2.20	3.26	3.65	3.22	4.27	5.27	5.73
3	2.69	2.87	4.46	4.77	5.10	5.39	6.40	6.68
4	3.58	3.79	5.69	5.87	6.26	6.45	7.34	7.42
5	4.75	4.77	7.03	7.13	7.49	7.61	8.28	8.29
6	6.40	6.58	8.63	8.66	8.95	9.00	9.48	9.50
7	8.92	8.94	10.65	10.56	10.79	10.75	10.97	10.78
8	13.16	12.58	13.37	13.26	13.24	13.05	12.71	12.27
9	19.12	19.28	17.36	16.94	16.66	16.27	15.29	14.94
10	38.21	37.44	27.73	26.81	25.53	24.44	21.28	20.50

לוח 4: התפלגות מצטברת לעשירונים באחוזים,ממוצע 1969-1973

עשירון	ילדים כלכלית	ילדים ברוטו	נפשות כלכלית	נפשות ברוטו	בוגרים כלכלית	בוגרים ברוטו	משפחות כלכלית	משפחות ברוטו
1	1.23	1.55	1.82	2.35	2.76	2.77	2.98	3.89
2	3.17	3.75	5.08	6.00	5.98	7.04	8.25	9.62
3	5.86	6.62	9.54	10.77	11.08	12.43	14.65	16.30
4	9.44	10.41	15.23	16.64	17.34	18.88	21.99	23.72
5	14.19	15.18	22.26	23.77	24.83	26.49	30.27	32.01
6	20.59	21.76	30.89	32.43	33.78	35.49	39.75	41.51
7	29.51	30.70	41.54	42.99	44.57	46.24	50.72	52.29
8	42.67	43.28	54.91	56.25	57.81	59.29	63.43	64.56
9	61.79	62.56	72.27	73.19	74.47	75.56	78.72	79.50
10	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
ג'יני	.52300	.508380	.392920	.371220	.354760	.331620	.278480	.253200

לוח 5: אחוז ההכנסה מהכנסת כל עשירון שהועברה בשיטה 1

עשירונים / התפלגות	2	3	4	5	6	7	8	9
ילדים								
כלכלית	15	15	14	13	11	9	7	5
ברוטו	14	14	14	13	11	9	7	5
נפשות								
כלכלית	9	9	9	9	8	8	7	6
ברוטו	8	8	9	8	8	8	7	6
בוגרים								
כלכלית	9	8	8	8	8	7	7	6
ברוטו	7	7	8	8	8	7	7	6
משפחות								
כלכלית	6	6	7	7	7	7	7	7
ברוטו	5	6	7	7	7	7	7	7

לוח 6: אחוז ההכנסה מהכנסת כל עשירון שהועברה בשיטה 2

עשירונים / התפלגות	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
ילדים														
כלכלית	15	11	15	11	14	11	13	9	11	8	9	6	7	5
ברוטו	14	10	14	11	14	10	13	9	11	8	9	6	7	5
נפשות														
כלכלית	9	7	9	7	9	7	9	7	8	7	8	6	7	5
ברוטו	8	6	8	7	9	7	8	7	8	7	8	6	7	5
בוגרים														
כלכלית	9	6	8	6	8	7	8	7	8	6	7	6	7	5
ברוטו	7	6	7	6	8	7	8	7	8	7	7	6	7	6
משפחות														
כלכלית	6	5	6	5	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6
ברוטו	5	5	6	5	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6

בלוח 7 מופיעים הערכים ל- ϵ ההופך דירוג עבור נקודות חתוך שונות של עקומות לורנץ כאשר העברות ההכנסה מתבצעות בשיטה 1 ובלוח 8 ערכים אילו כאשר העברות ההכנסה בין העשירונים בוצעו בשיטה 2.

הטור האחרון בלוחות 7 ו-8 מראה כי מדדי לורנץ כמעט ולא השתנו ע"י העברות הכנסה בשתי השיטות הנ"ל.

בלוח 7 לא מופיעים ערכים ל- ϵ ההופך דירוג כאשר נקודות החתוך היו בין העשירונים 5-6, או בין עשירונים גבוהים יותר, ובחלק מהמקרים גם כאשר עקומות לורנץ נחתכות בין עשירונים 4-5. הסיבה לכך היא ש- ϵ ההופך דירוג צריך היה להיות קטן מ-0.1 וכפי שנאמר בראשית סעיף זה כאשר $\epsilon \to 0$, $I \to 0$ היינו המדד מראה שוויון מוחלט (בגבול), ולכן עבור ϵ קטן מאד לא יהיה המדד רגיש מספיק להעברות הכנסה בין פרטים שונים. אלטרנטיבית, $\epsilon=0$ פירושו תועלת שולית קבועה, היינו פונקצית תועלת לינארית, ולכן רמת התועלת החברתית בלתי תלויה בהתחלקות ההכנסות אלא רק בסה"כ ההכנסה.(ד)

כצפוי מראש הערכים המתקבלים ל- ϵ ההופך דירוג יורדים כאשר עולה נקודת החתוך בשתי שיטות ההעברה, (כאשר משווים התפלגויות הכנסה שונות עם התפלגות כלשהי כאשר הן מתקבלות ממנה ע"י העברות הכנסה בחלקים שונים של ההתפלגות), מאחר ו- ϵ מבטא את רגישות המדד להעברות הכנסה בתחומים השונים של סולם ההכנסות. וככל שהן נעשות בהכנסות גבוהות יותר ערך פרמטר "שנאת השוויון" הנותן לכך ביטוי באמצעות הפוך דירוג ההתפלגויות בעזרת מדד אטקינסון יהיה נמוך יותר.(ה)

עיון בלוחות 4-8 ועד בכלל, מראה כי הערכים ל- ϵ ההופך דירוג בלתי תלויים במיקומה של עקומת לורנץ. תזוזה אפקית של כל העקומה (כפי שמתבטא בטורי לוח 4) לא משפיע שיטתית על השונות בין המספרים בכל טור בלוחות 7 ו-8. פירושו כי הזזה אפקית של עקומות לורנץ, כך שנקודת החתוך אינה משתנה, אינה יכולה להסביר את השונות בטורי לוחות 2, 7 ו-8.

מהשוואת לוחות 5 עם 7 ולוחות 6 ו-8 נובע כי גם אחוז ההכנסה המועבר אינו מסביר שונות זו. בלוח 5, בטורים השני השלישי והרביעי אחוז זה יורד לאורך הטורים, אלם אין שינוי עקבי מקביל בטורי לוח 7, ואותו הדבר מתקיים כאשר משווים את הטורים בלוח 6 עם הטורים המתאימים בלוח 8.

מן הראוי לציין כי הגודל המוחלט של ההכנסה המועברת עולה לאורך השורות ושווה לכל ההתפלגויות בכל טור. השוני בין השורות באחוז ההכנסה המועבר נובע כמובן מהשוני בין ההתפלגויות באחוז ההכנסה שמקבל כל עשירון.

בלוח 7 ויותר מכך בלוח 8 רואים יציבות יחסית בערכים של ϵ ההופך דירוג בכל טור, והמשתנה המסביר העיקרי הוא איפוא נקודת החתוך של עקומות לורנץ.

השוואת לוחות 7 ו-8 מלמדת כי הגדלת אחוז ההכנסה המועבר מביאה לעליה ב- ϵ ההופך דירוג בכל נקודות החתוך פרט לקצות ההתפלגות, כלומר, הגדלת השוני בין ההתפלגויות מביאה לכך שמתקבלים ערכים גם לנקודות חתוך ברמות גבוהות יותר של $F(y)$.
אולם תחום הערכים שמקבל פרמטר "שנאת השוויון" ההופך דירוג כמעט ואיננו משתנה.

לבסוף נעיר כי הזזה אפקית של עקומת לורנץ ימינה, (הקטנת $\Phi(y)$ בכל רמה של $F(y)$). מביאה לעליה במדד אטקינסון לכל ϵ, כפי שמתבטא בלוח 9. עובדה זו נובעת מכך שלמדד משמעות במונחי אחוזים מסך ההכנסה,(ו) והוא תלוי לא רק בפונקצית התועלת האינדיוידואלית אלא גם בהתפלגות ההכנסות למעשה. אם התפלגות כלשהי (A) מתקבלת מ-(B) ע"י העברות בנוסח פיגו-דלטון(ז) הרי יתקיים $\hat{Y}^{A}_{ede} > \hat{Y}^{B}_{ede}$ ולכן $I_a < I_b$

לוח 7: ϵ מהפך דירוג, העברות קטנות (שיטה 1)

עשירונים ביניהן נחתכות עקומות לורנץ התפלגויות	2-3	3-4	4-5	תחום ג'יני
<u>ילדים</u>				
כלכלית	1.4	0.65	0.2	.516 - .525
ברוטו	1.8	0.8	0.4	.502 - .510
<u>נפשות</u>				
כלכלית	1.0	0.4		.386 - .395
ברוטו	1.4	0.6		.364 - .373
<u>בוגרים</u>				
כלכלית	1.2	0.6		.348 - .358
ברוטו	1.4	0.6		.325 - .333
<u>משפחות</u>				
כלכלית	1.0	0.6		.272 - .280
ברוטו	1.8	1.0	0.4	.246 - .255

לוח 8: ϵ מהפך דירוג העברות גדולות (שיטה 2)

עשירונים ביניהם נחתכות עקומות לורנץ התפלגויות	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	תחום ג'יני
ילדים								
1. כלכלית	2.6	1.4	1.0	0.8	0.4	0.2		.524 - .531
2. ברוטו	3.4	1.8	1.2	1.0	0.6	0.2		.507 - .517
נפשות								
3. כלכלית	1.8	1.2	1.0	0.8	0.6	0.2	0.2	.393 - .403
4. ברוטו	2.4	1.6	1.2	0.8	0.6	0.2		.371 - .382
בוגרים								
5. כלכלית	5.0	1.6	1.2	0.8	0.6	0.2		.356 - .367
6. ברוטו	2.4	1.6	1.2	1.0	0.6	0.2	0.2	.333 - .343
משפחות								
7. כלכלית	1.8	1.4	1.2	1.0	0.6	0.2		.280 - .290
8. ברוטו	2.6	2.0	1.8	1.4	1.0	0.6		.257 - .267

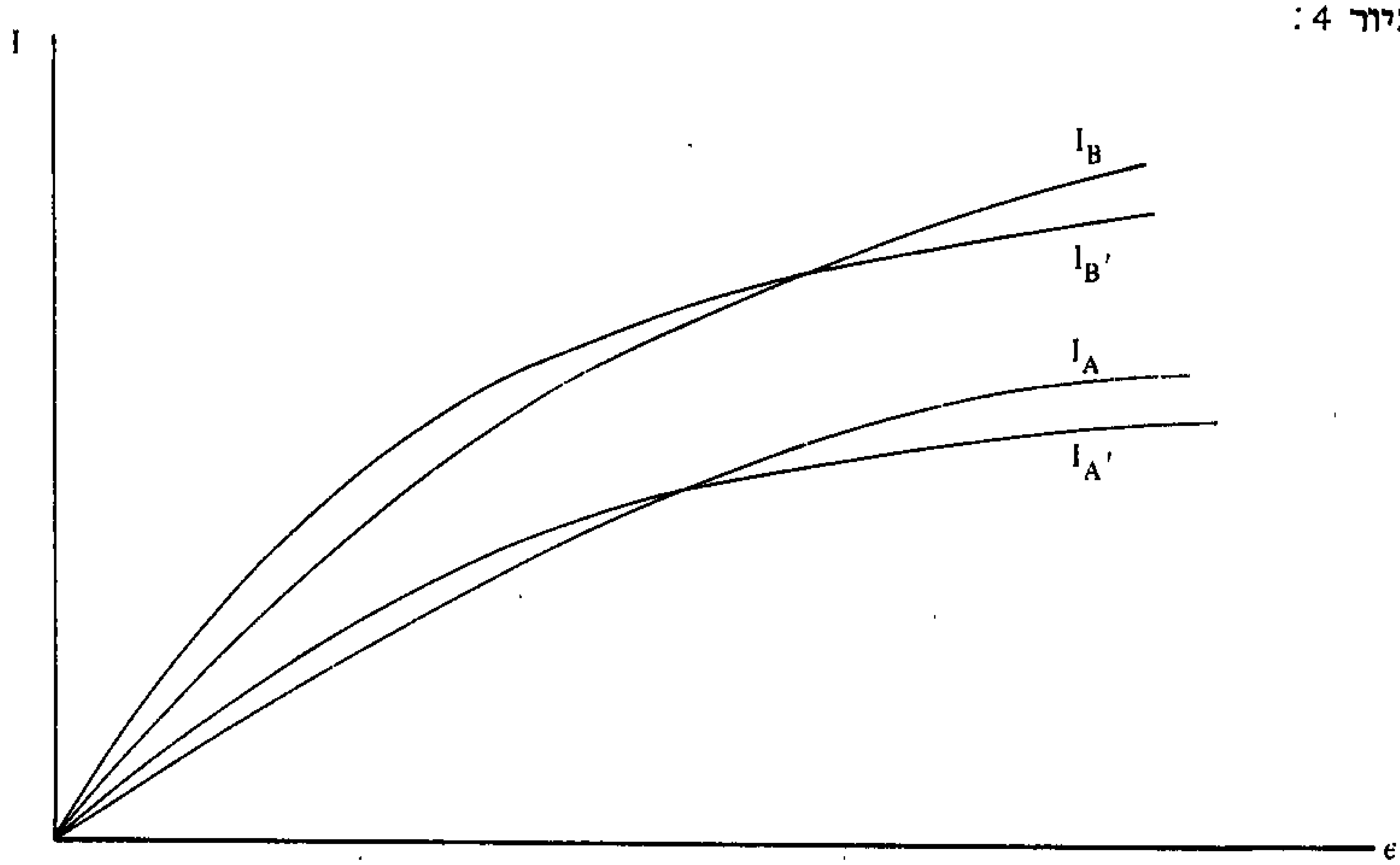
לוח 9: מדדי אטקינסון להתפלגויות השתות ברמות שונות של ϵ

התפלגויות	ג'יני	4.9	4.5	4.10	3.7	3.3	2.9	2.5	2.1	1.7	1.3	0.9	0.5	0.1
.1	.526	.790	.780	.768	.752	.733	.708	.675	.631	.569	.484	.369	.221	.046
.2	.511	.743	.733	.720	.704	.685	.660	.629	.586	.528	.449	.343	.207	.044
.3	.397	.683	.667	.647	.623	.593	.555	.509	.453	.386	.307	.219	.124	.025
.4	.376	.603	.586	.566	.542	.513	.479	.438	.389	.332	.266	.191	.109	.022
.5	.360	.567	.551	.532	.510	.483	.450	.411	.364	.309	.246	.176	.100	.020
.6	.337	.536	.517	.496	.470	.441	.407	.368	.323	272	.215	.153	.087	.018
.7	.284	.490	.468	.442	.413	.378	.343	.302	.257	.211	.162	.113	.063	.012
8	.261	.372	.353	.323	.310	.284	.257	.228	.197	.163	.127	.089	.050	.010

המספרים בטור הימני מסמנים את 8 ההתפלגויות בהתאמה עם המספרים בלוח 8.

ציור 4 מסכם את הקשר שבין התפלגויות הכנסה למדדי אטקינסון עבור ערכים שונים של פרמטר "שנאת שוויון" כפי שמתבטא בלוח 9 ובדיון לאורך סעיף 3.

ציור 4:



I_a הוא מדד אטקינסון להתפלגות A המתקבלת מהתפלגות B ע"י העברות בנוסח פיגו-דלטון, ואילו $I_{a'}$ ו- $I_{b'}$ הם המדדים להתפלגויות A' ו- B' המתקבלות מהתפלגויות A ו- B בהתאמה ע"י העברת הכנסה כך שעקומות לורנץ של התפלגויות A ו- A' (B ו- B') נחתכות.(ח)

א. שם

ב. מדד סטית התקן של הלוגריתמים מוגדר כ: $\int_0^{\bar{y}} [\log(\frac{y}{\mu})]^2 f(y)\,dy$

ג. מדד מקדם השונות מוגדר כ: $\frac{v}{\mu}$
כאשר v היא סטית התקן של ההתפלגות ו- μ הממוצע שלה.

ד. הסבר זה תופש גם לגבי הטור האחרון בלוח 8.

ה. בשני מקרים בטור האחרון של לוח 8 ϵ נשאר קבוע. הסיבה לכך היא כי המדדים חושבו ל- ϵ שונים כאשר ההפרש ביניהם הוא 0.2 והקטנת רווח זה היתה מביאה לשמירת מגמת הירידה בשורות.

ו. ההסבר המלא בסעיף 3.

ז. מעבר המתבטא בשוני בין ההתפלגויות המתאימות לשורות לוח 9.

ח. הדיון הנ"ל עוסק בהתפלגויות שונות בעלות אותו ממוצע. על השוואת התפלגויות עם ממוצעים שונים ראה אטקינסון (2) ע"מ 246-247.

סכום

כל נסיון לתת משמעות חברתית לדירוג התפלגויות הכנסה בעזרת מדד אי-שוויון כלשהו מחייב הכרעה בדבר טיבה של פונקצית הרווחה החברתית שכן השוואת התפלגויות הכנסה בעזרת מדדי אי שוויון מניחה, כפי שנאמר, קיומה של פונקציה כזו.

ראינו גם כי מדד הסטיה היחסית הממוצעת בלתי רגיש להעברות הכנסה מצד אחד של הממוצע, ואילו מדד ג'יני נתון יכול להתאים לאינסוף התפלגויות שונות של הכנסה כאשר עקומות לורנץ שלהן נחתכות.

אטקינסון נתן תשובה לשתי השאלות בעזרת ניסוח מדד הנובע ישירות מפונקצית רווחה חברתית ספציפית, ובו פרמטר המבטא את רגישות המדד להעברות הכנסה בחלקים השונים של ההתפלגות - כלומר, פרמטר הנותן משמעות לדירוג התפלגויות הכנסה כאשר עקומות לורנץ שלהן נחתכות.

הטענה המקובלת נגד מדד זה היא, שהוא מניח פונקצית תועלת בעלת גמישות תועלת שולית קבועה, כלומר, פרמטר "שנאת השוויון" בלתי תלוי ברמה האבסולוטית של ההכנסות, וכך ניתן להשוות את אי-השוויון בהכנסות בין הודו לארה"ב, או במדינה כלשהי לאורך זמן, ע"י מדד אטקינסון, בבחירה כלשהי של פרמטר זה.

לפי טיעון זה העניין באי-השוויון עולה עם העליה ברמת ההכנסות ולכן ניסוח כנ"ל של פונקצית הרווחה החברתית אינו מספק.

טענתנו היא שאפילו נקבל את גישת פונקצית התועלת שבה גמישות התועלת השולית (ϵ) קבועה, הרי לרמה קבועה זו משמעות מוגבלת למדי. כפי שראינו התוצאות האמפיריות אינן יכולות להצביע על קשר בין פרמטר "שנאת השוויון" לחלקים השונים של התפלגויות ההכנסה, ולכן לא ניתן לקבוע מהי רמה גבוהה או נמוכה של שנאת שוויון. מאידך דירוג התפלגויות ברמה מסוימת של ϵ תלוי בשוני ביניהן בכל נקודה של ההתפלגות, שכן המדד תלוי בהתפלגות כולה.

מאחר ובד"כ לא ניתן לאמר דבר בעל משמעות מעיון בהתפלגות ההכנסה כולה, ייתכן כי רצוי לצרכי דיון בחלוקת הכנסות להביא נתונים מקבצים, (עשירונים למשל), ובכך ניתן להשיג ראיה כללית למדי על ההתפלגות כולה.

המגבלה בהצגה כזו היא כמובן הפסד האינפורמציה על אי-השוויון בתוך כל קבוצה, אולם שימוש במדד יחיד כרוך בבעיות מושגיות שאינן נראות פשוטות יותר.

התמונה הטובה ביותר יכולה להתקבל אולי, ובכך אין כל חדוש, משלוב של הצגה מקבצת כנ"ל ומדד מסכם של ההתפלגות כולה.

רשימה ביבליוגרפית

1. Arrow, K.J. "Aspects of the Theory of Risk-Bearing" Yrjö Jahnssonin Säätiö, Helsinki, 1965.
2. Atkinson, A, B. "On The Measurement of Inequality" Journal of Economic Theory, 2 (1970).
3. Dalton, H. "The Measurement of The Inequality of Incomes" Economic Journal 30, September (1920).
4. Kondor, Y. "Value Judgement Implied by The Use of Various Measurements of Income Inequality" The Review of Income and Wealth. 21 (1975).
5. Pratt, J.W. "Risk Aversion in the Small and Large", Econometrica, 32 (1964).
6. Rothschild, M, and Stiylitz, J.E. "Increasing Risk I: A Definition," Journal of Economic Theory 2, (1969).
   "Some Farther Results on the Measurement of Inequality," Journal of Economic Theory 1 (1971).